

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik notwendig. Weiterführende und verwandte Themen sind:

www.versuchsmethoden.de/Hypothesentests.pdf

Einführung

Mit Hilfe einer zufällig „gezogenen“ Stichprobe, die einen möglichst repräsentativen Querschnitt der Grundgesamtheit liefert, sollen statistische Aussagen getroffen werden. So ist z.B. die Frage zu beantworten, ob die Mittelwerte auf Basis zweier Stichproben von Chargen gleich sind.

Ziel und Nutzen

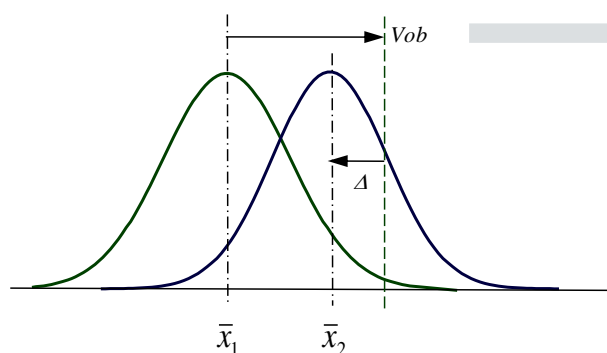
Die Frage ist, welche Stichprobengröße notwendig ist, um bei unvermeidlicher Streuung noch eine Aussage über einen Unterschied treffen zu können. Die folgenden Verfahren liefern hierzu die passende Stichprobengröße.

Grundlagen

Wie unter dem Hypothesentest beschrieben, gibt es zwei Fehlerarten. Für die Fragestellung einen gewünschten Effekt nicht zu übersehen wird die Alternativhypothese H_1 benötigt, die z.B. behauptet, dass die Mittelwerte zweier Stichproben unterschiedlich sind. Die dazugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit ist der sogenannte β -Fehler, bzw. der Fehler 2. Art.

Bestimmung des β -Fehlers am Beispiel Mittelwertvergleich

Es ist H_1 zu prüfen, die Mittelwerte zweier Stichproben sind ungleich.



Mit Hilfe der t-Verteilung (Studentverteilung) erhält man den gesuchten Wert für den β -Fehler.

Bestimmung eines Vertrauensbereiches für \bar{x}_1 der ersten Daten

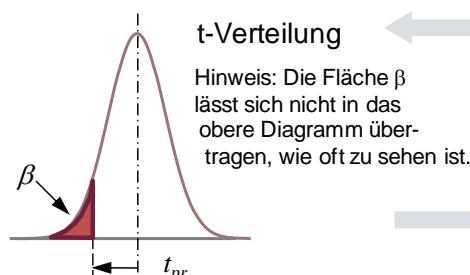
$$V_{ob} = \bar{x}_1 + t_{1-\alpha/2} \cdot s_d$$

$t_{1-\alpha}$ = Wert aus der t-Verteilung für $\alpha = 5\%$

Δ : um wieviel ragt \bar{x}_2 in den Vertrauensbereich von \bar{x}_1

$$\Delta = \bar{x}_2 - V_{ob}$$

$t_{pr} = \frac{\Delta}{s_d}$ dieser Abstand wird normiert auf eine gemeinsame Standardabweichung (siehe α)



t-Verteilung

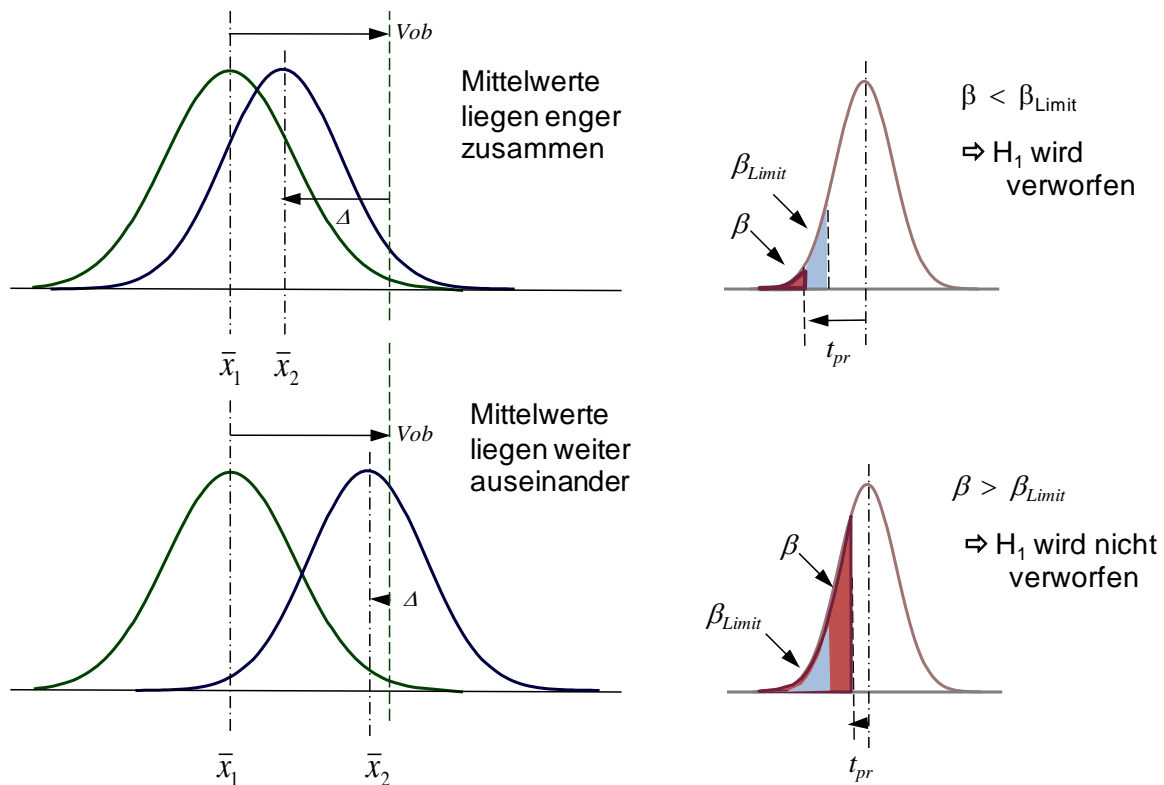
Hinweis: Die Fläche β lässt sich nicht in das obere Diagramm übertragen, wie oft zu sehen ist.

$$\beta = \text{VertlgStudent}(-t_{pr}; f)$$

Freiheitsgrad $f = n_1 + n_2 - 2$ für gleiche Standardabw. der Stichproben (hier wird nicht auf die Hälfte gerechnet)

Stichproben

Man legt für den Fehler 2. Art einen zul. Grenzwert fest β_{Limit} , in der Regel 10-20%*.



Die Teststärke Power

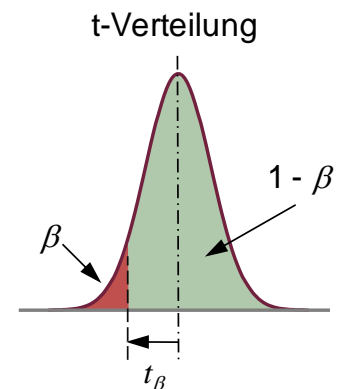
Die Teststärke Power beschreibt in der Statistik die Aussagekraft eines statistischen Tests. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Test zugunsten einer Alternativhypothese H_1 (zum Beispiel „Es gibt einen Unterschied“) entschieden wird. Es gilt:

$$\text{Power} = 1 - \beta$$

Hinweis: Ein Gegenstück zum α -Fehler gibt es hier nicht. Da Power über $1 - \beta$ mit dem Fehler 2. Art zusammenhängt, laufen die Fragestellungen letztlich immer auf die Alternativhypothese raus.

Legt man Power vorher fest, in der Regel auf 0,8 ($\beta = 0,2$), so lässt sich hieraus ein notwendiger Stichprobenumfang bestimmen, der notwendig ist, einen Unterschied festzustellen.

Power wird auch die **Teststärke** bzw. **Trennschärfe** genannt.

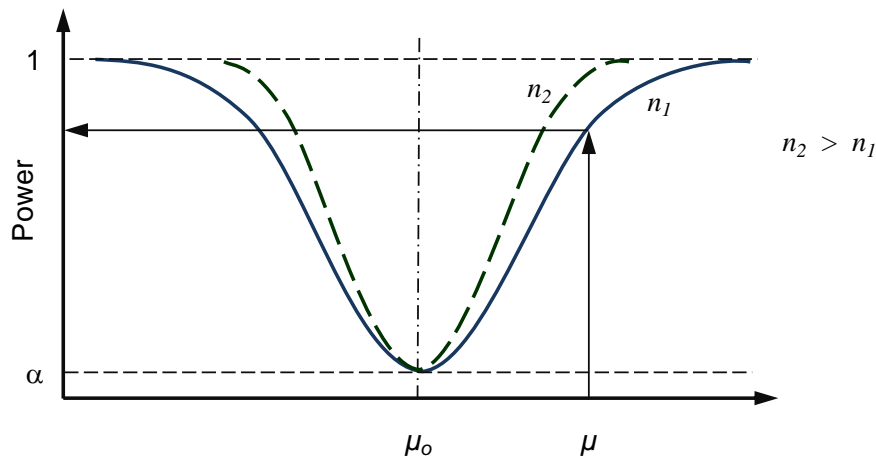


Ermittlung der Stichprobengröße mit Hilfe der Power-Funktion

Für eine zweiseitige Fragestellung ($H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu < > \mu_0$) gilt folgende Beziehung, auch Gütefunktion genannt:

$$Power = \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$

mit Φ = Verteilungsfkt. der Normalverteilung



Ist der Mittelwert μ gleich der Vorgabe μ_0 , so ist Power = α . Je größer der Abstand zur Vorgabe wird, umso mehr steigt Power, d.h. die Aussagewahrscheinlichkeit, dass ein Unterschied da ist, nimmt zu. Wie im Bild zu sehen ist, steigt Power bei gleichem Abstand auch, wenn die Stichprobengröße zunimmt (Schnittpunkt für Senkrechte bei Kurve für n_2 liegt höher). Die Ermittlung der Stichprobengröße n muss iterativ erfolgen.

Beispiel Messung eines Durchmessers:

Es soll die Abweichung eines Durchmessers mit Sollwert 15mm überprüft werden. Ab wann wird diese Abweichung entdeckt, wenn man mit einem Messschieber eine Genauigkeit von $\pm 0,1$ mm hat. Der „Effekt“ muss also mindestens 0,1mm betragen um dies wahrzunehmen.

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 15,0 \text{ mm} \\ \mu &= 15,1 \text{ mm} \quad (\text{es reicht die Betrachtung der Abw. nach oben aus}) \\ \sigma &= 0,5 \text{ mm} \quad (\text{bekannt aus Voruntersuchungen}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,05 \quad (\text{Signifikanzniveau bzw. Vertrauensbereich 95\%}) \\ Power &= 0,80 \end{aligned}$$

Ergebnis: $n = 197$

Interpretation: Mit einer Stichprobe von mindestens $n = 197$ wird mit 80%iger Wahrscheinlichkeit aufgedeckt, dass bei 95% der produzierten Teile ($1-\alpha =$ Vertrauensbereich) eine Abweichung von $\pm 0,1$ mm entdeckt wird.

In diesem Zusammenhang spricht man auch von **Trennschärfe** anstelle von Power.

Folgende einfache Beziehung wird häufig angewendet:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\mu - \mu_0}\right)^2 = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\Delta}\right)^2 \quad \text{für } \alpha = 5\% \text{ ist } z_{1-\alpha/2} = 1,96$$

Sie gilt jedoch nur für eine *Power* von 0,5, was oft nicht ausreichend ist. Im vorherigen Beispiel wäre damit der Stichprobenumfang n nur 97 Teile (aufgerundet).

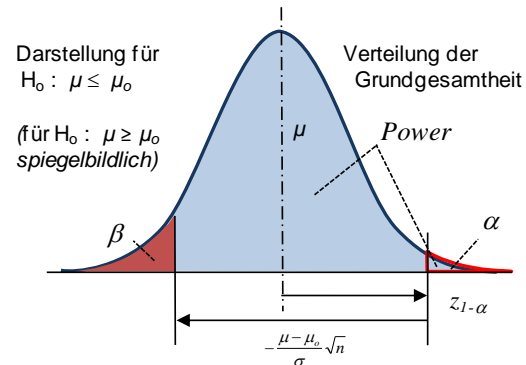
Für eine einseitige Fragestellung gelten folgende Berechnungen:

$$H_0: \mu \geq \mu_o \text{ gegen } H_1: \mu < \mu_o$$

$$Power = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_o}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$

$$H_0: \mu \leq \mu_o \text{ gegen } H_1: \mu > \mu_o$$

$$Power = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_o}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$



Bei dem vorherigen Beispiel würde für $\mu = 15,1$ als einseitige Fragestellung

$$H_0: \mu \leq \mu_o$$

anzuwenden sein, H_0 soll ja möglichst abgelehnt werden. Es werden $n = 155$ Teile benötigt.

Für diskrete Daten, z.B. für die Fehlerquote p eines Herstellprozesses, gibt es folgende Näherungsformel für die zweiseitige Fragestellung $H_0: p = p_o; H_1: p <> p_o$:

$$Power = 1 - \Phi\left(\frac{-\delta + z_{1-\alpha/2} \sqrt{p_o(1-p_o)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) + \Phi\left(\frac{-\delta - z_{1-\alpha/2} \sqrt{p_o(1-p_o)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$$

Für die einseitige Betrachtung gilt für $H_0: p \leq p_o; H_1: p > p_o$:

$$Power = 1 - \Phi\left(\frac{-\delta + z_{1-\alpha} \sqrt{p_o(1-p_o)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$$

bzw. für $H_0: p \geq p_o; H_1: p < p_o$:

$$Power = \Phi\left(\frac{-\delta - z_{1-\alpha} \sqrt{p_o(1-p_o)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$$

Beispiel Fehleranteil in einem Arbeitsprozess

Der Fehleranteil eines Arbeitsprozesses liegt normalerweise bei $p = 0,01$. σ wird somit auf 0,099 geschätzt. Wir sollen sicherstellen, dass der Fehleranteil nicht größer als 0,015 wird. Wie groß muss die Stichprobe sein, um dies sicherzustellen?

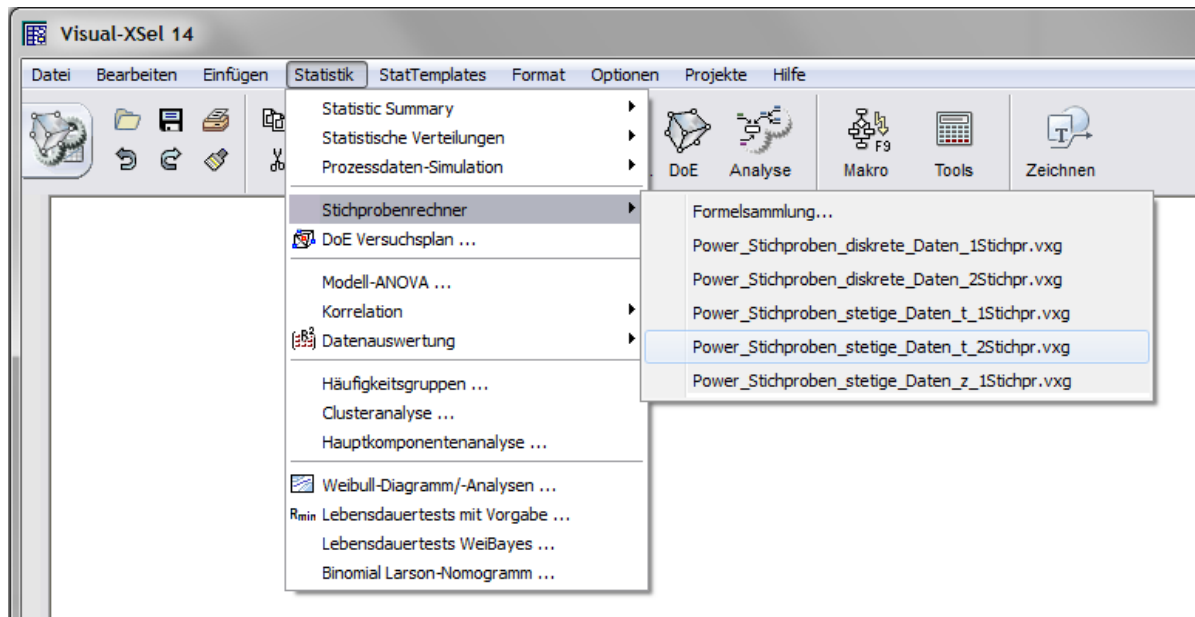
Für diese einseitige Fragestellung ist $H_1: p > p_o$ anzuwenden. Für $Power = 0,8$ würden 2830 Teile benötigt

Stichproben

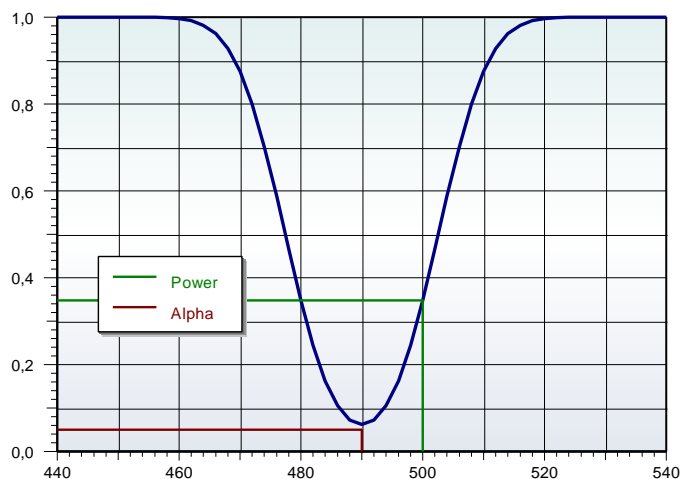
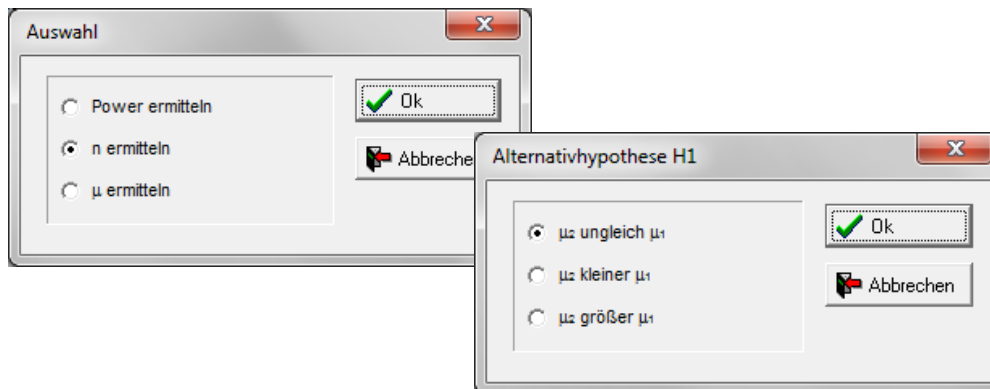
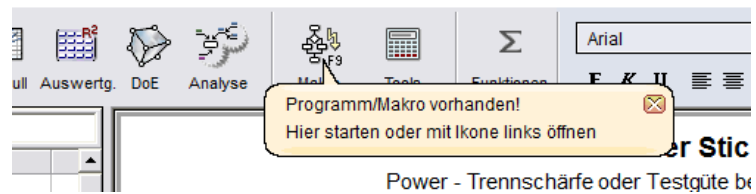
Anwendung in Visual-XSel 14.0

www.crgraph.de

In Visual-XSel können für verschiedene Fragestellungen Templates über den Menüpunkt *Statistik/Stichprobenrechner* geöffnet werden:



Starten Sie das Makro für die weiteren Eingaben und Optionen



Signifikanzniveau	0,05
Mittelwert μ_1	490,000
Mittelwert μ_2	500,000
Standardabw.	13,600
Umfang n	10
Power	0,348

Nullhypothese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ gegen $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Literatur

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis.

Beinhaltet statistische Methoden für Versuchsplanung & Datenanalyse, sowie Zuverlässigkeit & Weibull.

- Statistische Verteilungen und Tests & Mischverteilungen
- Six Sigma Einführung und Zyklen
- Systemanalysen Wirkdiagramm, FMEA, FTA, Matrizen-Methoden
- Shainin- und Taguchi-Methoden
- Versuchsplanung DoE, D-Optimal
- Korrelations- und Regressionsverfahren
- Multivariate Datenauswertungen
- Prozessfähigkeit – Messmittelfähigkeit MSA 4 und VDA 5
- Regelkarten
- Toleranzrechnung und Monte-Carlo-Simulation
- Statistische Hypothesentests
- Weibull und Lebensdaueranalysen
- Stichprobengröße

190 Seiten, Ringbuch

ISBN: 978-3-00-043678-9

